

**Dorin Andrica**

**Dorel Duca**

**Gheorghe Lobonț**

**Concursul interjudetean  
de MATEMATICĂ  
„Marian Țarină”**

**Volumul I  
(2001-2010)**

**Editura Paralela 45**

Design copertă: Marius Badea  
Pregătire de tipar: Marius Badea

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**  
**ANDRICA, DORIN**

**Concursul interjudețean de matematică „Marian  
Țarină” / Dorin Andrica, Dorel Duca, Gheorghe Lobonț. -**  
Pitești : Paralela 45, 2023

2 vol.

ISBN 978-973-47-3848-9

**Vol. 1 : (2001-2010). - 2023. - ISBN 978-973-47-3849-6**

I. Duca, Dorel

II. Lobonț, Gheorghe

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2023

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.  
[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

# Cuprins

<b>I</b>	<b>Enunțuri 2001-2010</b>	<b>9</b>	
	<b>Capitolul 1</b>	<b>Enunțuri</b>	<b>11</b>
	1.1	Ediția I (23-25 februarie 2001)	11
	1.2	Ediția a II-a (17-19 mai 2002)	15
	1.3	Ediția a III-a (16-18 mai 2003)	20
	1.4	Ediția a IV-a (14-16 mai 2004)	26
	1.5	Ediția a V-a (20-22 mai 2005)	31
	1.6	Ediția a VI-a (12-13 mai 2006)	37
	1.7	Ediția a VII-a (25-26 mai 2007)	43
	1.8	Ediția a VIII-a (16-17 mai 2008)	49
	1.9	Ediția a IX-a (15-16 mai 2009)	55
	1.10	Ediția a X-a (14-15 mai 2010)	61
<b>II</b>	<b>Soluții 2001-2010</b>	<b>69</b>	
	<b>Capitolul 2</b>	<b>Soluții</b>	<b>71</b>
	2.1	Ediția I (23-25 februarie 2001)	71
	2.2	Ediția a II-a (17-19 mai 2002)	80
	2.3	Ediția a III-a (16-18 mai 2003)	99
	2.4	Ediția a IV-a (14-16 mai 2004)	114
	2.5	Ediția a V-a (20-22 mai 2005)	130
	2.6	Ediția a VI-a (12-13 mai 2006)	153
	2.7	Ediția a VII-a (25-26 mai 2007)	172
	2.8	Ediția a VIII-a (16-17 mai 2008)	194
	2.9	Ediția a IX-a (15-16 mai 2009)	219
	2.10	Ediția a X-a (14-15 mai 2010)	236

# Cuvânt înainte

Dacă științele matematice sunt o piramidă de stilizări, a face matematică înseamnă a învăța stilizarea (modelarea) situațiilor concrete și a operațiilor efectuate asupra lor. Matematica este o școală a rigorii. Profesorii văd fondul vocației lor în faptul că învățarea matematicii are semnificație pentru ei în măsura în care contribuie la dezvoltarea intelectuală a elevilor. Ei formează inteligențe în sensul propriu al termenului, le dau o structură, atunci când ea nu este decât virtuală, îi învață să gândească riguros și să își utilizeze propriile capacități.

Concursurile de matematică, dar nu numai de matematică, au în primul rând rolul de socializare. Elevul care participă la un concurs întâlnește colegi din alte clase, de la alte școli, din alte localități, din alte țări și cunoaște alți profesori. Profesorul care merge cu elevii la un concurs cunoaște alți elevi, se întâlnește sau se reîntâlnește cu alți colegi și, de ce nu, cu unii din profesorii lui... Pe de altă parte, concursurilor au rolul de a răspunde unei necesități sufletești a candidaților: Care este nivelul meu de pregătire în comparație cu colegii mei?

Urmărind aceste idei, prof. Mariana Ursu și prof. Gheorghe Lobonț, au inițiat în anul 2001, la Colegiul Național „Mihai Viteazul” din Turda, Concursul Interjudețean de Matematică „Marian Țarină”. Numele concursului este dat de Marian Țarină (1932-1992), fost elev al liceului „Regele Ferdinand”, actualmente Colegiul Național „Mihai Viteazul” din Turda. Acesta a fost unul dintre marii profesori de la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității „Babeș-Bolyai” din Cluj-Napoca, cu multiple preocupări legate de matematica de nivel preuniversitar și colaborator la Gazeta Matematică. În primul an concursul a avut loc iarna și s-a adresat doar elevilor de liceu. Din anul următor a fost extins și la clasele de gimnaziu și s-a desfășurat în luna mai, după etapa națională a Olimpiadei de Matematică. Observând că după etapa națională a olimpiadelor interesul elevilor pentru concursuri scade, în ultimii ani concursul s-a desfășurat înaintea Olimpiadei Naționale de Matematică. Începând cu anul 2007 concursul a fost extins și pentru elevii claselor a IV-a.

Toate cele 19 ediții de până acum s-au desfășurat la Colegiul Național „Mihai Viteazul” din Turda sub atenta îndrumare a directorilor: prof. Mariana Ursu, prof. Gheorghe Lobonț, prof. Alexandra Zamfir. Încă de la început concursul s-a bucurat de un sprijin substanțial din partea unor cadre didactice de la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității „Babeș-Bolyai” din Cluj-Napoca, în ceea ce privește întocmirea subiectelor și coordonarea corecturii lucrărilor participanților. Președintele tuturor edițiilor a fost prof. univ. dr. Dorel I. Duca.

Problemele propuse la cele 19 ediții sunt conținute în prezentele două volume. Primul volum acoperă perioada 2001-2010 iar al doilea perioada 2011-2019, împreună conținând 640 probleme cu grad ridicat de dificultate însoțite de rezolvări complete. Ne exprimăm speranța că această lucrare este utilă atât elevilor cât și profesorilor în procesul de pregătire pentru concursurile de matematică.

# Capitolul 1

## Enunțuri

### 1.1 Ediția I (23-25 februarie 2001)

#### Clasa a IX-a

1. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{aligned} & \left( \left[ \frac{x+1}{4} \right] + \left[ \frac{x+4}{4^2} \right] + \left[ \frac{x+4^2}{4^3} \right] + \dots + \left[ \frac{x+4^{n-1}}{4^n} \right] \right) \\ & + \left( \left[ \frac{x+2}{4} \right] + \left[ \frac{x+2^3}{4^2} \right] + \left[ \frac{x+2^5}{4^3} \right] + \dots + \left[ \frac{x+2^{2n-1}}{4^n} \right] \right) \\ & + \left( \left[ \frac{x+3}{4} \right] + \left[ \frac{x+3 \cdot 4}{4^2} \right] + \left[ \frac{x+3 \cdot 4^2}{4^3} \right] + \dots + \left[ \frac{x+3 \cdot 4^{n-1}}{4^n} \right] \right) \\ & = [x] - 1, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Gheorghe Lobonț

2. Fie numerele reale  $a, b, c, d \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ , astfel încât  $a + b + c + d = 1$ .

Să se arate că:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \geq \sqrt{1-3a} + \sqrt{1-3b} + \sqrt{1-3c} + \sqrt{1-3d}.$$

Dorin Andrica

3. Să se arate că, în orice triunghi

$$\frac{m_a}{a \cdot s_a} + \frac{m_b}{b \cdot s_b} + \frac{m_c}{c \cdot s_c} \geq \frac{\sqrt{3}}{R},$$

unde  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor,  $m_a, m_b, m_c$  sunt lungimile medianelor,  $s_a, s_b, s_c$  sunt lungimilor simedianelor interioare ale triunghiului, iar  $R$  este raza

cercului circumscris triunghiului (simediana este simetrica unei mediane față de bisectoarea din același vârf).

Vasile Șerdean

4. Fie  $\triangle ABC$  oarecare,  $M$  un punct în interiorul  $\triangle ABC$  și  $P$  un punct fixat în plan. Notăm cu  $\vec{r}_X = \vec{PX}$  (vectorul de poziție al punctului oarecare  $X$  din plan) și cu  $S, S_A, S_B, S_C$  ariile triunghiurilor  $ABC, MBC, MCA, MAB$ . Să se arate că:

$$1) \vec{r}_M = \frac{1}{S}(S_A \cdot \vec{r}_A + S_B \cdot \vec{r}_B + S_C \cdot \vec{r}_C);$$

$$2) \vec{r}_I = \frac{1}{a+b+c}(a \cdot \vec{r}_A + b \cdot \vec{r}_B + c \cdot \vec{r}_C);$$

$$\vec{r}_H = \frac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}(\operatorname{tg} A \cdot \vec{r}_A + \operatorname{tg} B \cdot \vec{r}_B + \operatorname{tg} C \cdot \vec{r}_C);$$

$$\vec{r}_O = \frac{1}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}(\sin 2A \cdot \vec{r}_A + \sin 2B \cdot \vec{r}_B + \sin 2C \cdot \vec{r}_C);$$

unde  $I, H, O$  sunt centrul cercului înscris, ortocentrul și centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$ ,  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor  $BC, CA, AB$  iar  $A, B, C$  sunt măsurile unghiurilor triunghiului  $ABC$ .

Ariana Stanca Văcărețu, Daniel Văcărețu

## Clasa a X-a

1. Fie

$$\begin{aligned} & \sqrt{2^x \cdot \lg(2y^4 + 5y^2 + 2)} + \sqrt{[2^x + \lg(y^2 + 2)] \cdot \lg(2y^2 + 1)} \\ & + \sqrt{[2^x + \lg(2y^2 + 1)] \cdot \lg(y^2 + 2)} = \sqrt{2} \cdot [2^x + \lg(2y^4 + 5y^2 + 2)]. \end{aligned}$$

Să se determine  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Gheorghe Lobonț

2. Membrii unei echipe sportive au tricourile numerotate de la 1 la  $n$ . Ei ocupă loc într-o tribună cu scaune numerotate de la 1 la  $m$ .

a) În câte moduri se poate face așezarea?

b) Dar dacă în timpul așezării exact  $k$  dintre sportivi are același număr pe tricou cât și pe scaunul pe care îl ocupă (unde  $k \leq \min\{m, n\}$ )?

Dorin Andrica

3. Determinați:

a)  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel încât:  $\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 \cdot \cos \alpha$ ;

b)  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât:

$$\left( \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right)^n + 2^n = 0.$$

Ioan Popa

4. Fie  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = 1$ . Să se arate că:  $|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| \geq 2$ .  
Când are loc egalitatea? Argumentați.

\*\*\*

### Clasa a XI-a

1. Calculați:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x - \sqrt[n]{(x-1^2) \cdot (x-2^2) \cdot \dots \cdot (x-n^2)} \right) \right].$$

Dorel I. Duca

2. Fie  $x_1 \in \mathbb{R}$  fixat și  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  șirul definit prin recurența:

$$x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Calculați  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{n+1} + 1)^2}{(x_1^2 + 2) \cdot (x_2^2 + 2) \cdot \dots \cdot (x_n^2 + 2)}$ .

Dorel I. Duca

3. Fie  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $A^p + A^{p+1} = O_n$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .  
Dacă  $B = A + I_n$ , arătați că matricea

$$C = I_n + AB + \dots + A^{p-1}B^{p-1}$$

este inversabilă.

Gheorghe Lobonț

4. Fie

$$D = \begin{vmatrix} (a^2 + 1)^3 & (ab + 1)^3 & (ac + 1)^3 & (ad + 1)^3 \\ (ab + 1)^3 & (b^2 + 1)^3 & (bc + 1)^3 & (bd + 1)^3 \\ (ac + 1)^3 & (bc + 1)^3 & (c^2 + 1)^3 & (cd + 1)^3 \\ (ad + 1)^3 & (bd + 1)^3 & (cb + 1)^3 & (d^2 + 1)^3 \end{vmatrix}.$$

Să se calculeze determinantul  $D$ , punând rezultatul sub formă de produs.

Simion Miheț

## Clasa a XII-a

1. Fie

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Determinați morfismele de la inelul  $(A, +, \cdot)$  la inelul  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ , unde operațiile din inelul  $(A, +, \cdot)$  sunt cele uzuale de adunare și înmulțire a matricelor.

Dorel Miheț

2. Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  fixat,  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ ,

$$a_{ij} = \begin{cases} n-1, & \text{dacă } i = j \\ -1, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}, \quad b_{ij} = 1, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

$$M_x = \frac{-x}{n} \cdot A + \frac{1}{n \cdot x^2} \cdot B \quad \text{și} \quad G = \{M_x : x \in \mathbb{R}^*\}.$$

- a) Arătați că  $(G, \cdot)$  este grup comutativ izomorf cu grupul multiplicativ  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .  
b) Determinați  $(M_x)^{2001}$ .

Ioan Popa

3. Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe  $[0, 1]$ , continuă pe  $[0, 1]$  și

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Arătați că dacă  $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt definite prin:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) \cdot f'(x) \cdot \operatorname{ctg} \pi x, & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ \left( \frac{f'(x)}{\pi} \right)^2, & \text{dacă } x \in \{0, 1\}, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} (f(x))^2 \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 \pi x), & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ \left( \frac{f'(x)}{\pi} \right)^2, & \text{dacă } x \in \{0, 1\}, \end{cases}$$

atunci  $\varphi$  și  $\psi$  sunt integrabile pe  $[0, 1]$  și  $\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \psi(x) dx$ .

Dorel I. Duca

4. Să se calculeze:  $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{3 + \sin 4x}} dx$ .

\* \* \*

De asemenea, pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  avem

$$\begin{aligned} 0 = f_n(x_n) &= f_{n+1}(x_{n+1}) = \frac{1}{(1-x_n)^k} - (kx+n) \\ &= \frac{1}{(1-x_n)^k} - (kx+n+1) + 1 \\ &= f_{n+1}(x_n) + 1, \end{aligned}$$

deci  $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$ , de unde  $x_n < x_{n+1}$ , căci  $f_{n+1}$  este strict crescătoare. Astfel  $(x_n)_{n \geq 1}$  este șir strict crescător. (4)

Din (3), (4) și teorema lui Weierstrass de convergență pentru șiruri rezultă că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent. Fie  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [0, 1]$ . Folosind faptul că  $f_n(x_n) = 0$  și

$$f_n \left( 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \right) = -k \left( 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \right) < 0,$$

deducem că  $1 \geq x_n > 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . De aici, cu criteriul cleștelui, obținem că  $x = 1$ .

**2.** Fie cubul  $ABCD A' B' C' D'$  de muchie  $a$  și punctele  $X \in (AB, Y \in (AD, Z \in (AA'$  astfel încât  $AX = \alpha, AY = \beta, AZ = \gamma$  unde  $\alpha, \beta, \gamma \in (a, 2a)$ . Planul  $(XYZ)$  împarte cubul în două corpuri. Să se demonstreze că sferile situate în interiorul acestor corpuri, tangente planului  $(XYZ)$  și fețelor triedrelor tridreptunghice cu vârfurile în  $A$  respectiv  $C'$  au raze egale dacă și numai dacă

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{a}.$$

Daniel Văcărețu

**Soluție.** Considerăm sistemul de axe  $Oxyz$  în care  $O = A, (Ox = (AB, (Oy = (AD$  și  $(Oz = (AA'$ . Atunci  $X(\alpha, 0, 0), Y(0, \beta, 0)$  și  $Z(0, 0, \gamma)$  și ecuația planului  $(XYZ)$  este

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0.$$

Din enunț cele două sfere sunt tangente planelor  $(ABCD), (ABB'A'), (ADD'A'), (XYZ)$ , respectiv  $(BCC'B'), (CDD'C'), (XYZ)$ , deci au centrele pe  $AC'$  (căci  $ABCD A' B' C' D'$  este cub), de unde rezultă imediat că  $P$  și  $Q$  au coordonatele date de  $P(p, p, p)$  și  $Q(q, q, q)$ , cu  $p, q > 0$ . Atunci  $d(P, (XYZ)) = p$  și

$d(Q, (XYZ)) = a - q$  ceea ce revine la

$$\frac{\left| \frac{p}{\alpha} + \frac{p}{\beta} + \frac{p}{\gamma} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}} = p,$$

respectiv

$$\frac{\left| \frac{q}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{q}{\gamma} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}} = a - q,$$

adică la

$$1 - p \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) = p \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}$$

respectiv

$$\frac{q}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{q}{\gamma} = (a - q) \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}$$

(căci modulele s-au explicat ținând cont că originea  $A$  și  $P$  sunt de aceeași parte a lui  $(XYZ)$ , respectiv  $A$  și  $Q$  sunt separate de  $(XYZ)$ ). Notând cu  $r_1$  și  $r_2$  razele celor două sfere avem că  $r_1 = p$  și  $r_2 = a - q$ , unde

$$p = \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}} \right)^{-1}$$

și

$$a - q = \left[ a \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - 1 \right] \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}} \right)^{-1}.$$

$$\text{Atunci } r_1 = r_2 = a - q \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{a}.$$

**3.** Să se arate că ecuația

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

are cel mult o rădăcină reală.

**Soluție.** Fie  $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ . Atunci  $f'_n(x) = f_{n-1}(x)$  și

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

Evident  $f_n$  nu are rădăcini pozitive. Pentru  $n$  impar,  $f_n$  are cel puțin o rădăcină negativă. Dacă  $f_{2k-1}(x_0) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f_{2k}(x_0) > 0$

$f_1(x) = 1 + x$  este strict crescătoare pe  $(-\infty, 0)$  cu rădăcina unică  $x_1 < 0$ .

Presupunem că  $f_{2k-1}$  este strict crescătoare cu rădăcina unică  $x_{2k-1} < 0$ . Avem

$x$	$-\infty$		$x_{2k-1}$		$0$
$f_{2k+1}$	$-\infty$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$1$
$f_{2k}$	$\infty$	$\searrow$	$+$	$\searrow$	$1$
$f_{2k-1}$	$-\infty$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$1$

Deci  $f_{2n+1}$  are o unică rădăcină negativă și  $f_{2n}$  nu are rădăcini (are minim pozitiv conform (2)).

4. Fie numărul natural  $p$ ,  $p < 2002$ , fixat. Fie matricea  $A = (a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq 2002, \\ 1 \leq k \leq 2002}}$ , unde  $a_{ik} = (i + 1) \cdot |k - 1| + (i + 2) \cdot |k - 2| + \dots + (i + p) \cdot |k - p|$ . Calculați  $\det A$ .  
Octavian Agratini

**Soluție.** Descompunem matricea  $A$  în produs  $A = BC$ , unde

$$B = \mathcal{M}_{2002,p}(\mathbb{R}), b_{ij} = i + j \quad \text{și} \quad C = \mathcal{M}_{p,2002}(\mathbb{R}), c_{jk} = |k - j|.$$

Avem  $\text{rang } B \leq p$ ,  $\text{rang } C \leq p$  și folosind proprietatea

$$\text{rang } A \leq \min\{\text{rang } B, \text{rang } C\},$$

obținem  $\text{rang } A \leq p < 2002$ , deci  $\det A = 0$ .

### Clasa a XII-a

1. Să se determine grupurile  $(G, \cdot)$  cu proprietatea că oricare ar fi  $H$  subgrup al lui  $G$ ,  $H \neq \{e\}$ , ( $e$  - elementul neutru al grupului  $G$ ) avem  $(H, \cdot) \cong (G, \cdot)$ .  
\* \* \*

**Soluție.** Este clar că  $G$  trebuie să aibă cel puțin două elemente pentru a satisface enunțul.

**Cazul 1.**  $(G, \cdot)$  este grup finit. Fie  $x \in G$ ,  $x \neq e$ . Dacă  $\text{ord}(G) = n$ , atunci  $x^n = e$  și notând cu  $m = \text{ord}(x)$  atunci avem că  $H = \{e, x, \dots, x^{m-1}\}$  este

subgrup al lui  $G$  (este subgrupul generat de  $x$ ). Prin urmare (căci  $(H, \cdot) \cong G(\cdot, \cdot)$  și  $G$  este finit) rezultă că  $m = n$  și  $G = H$ , deci  $G$  este grup ciclic.

Vom demonstra că  $n = \text{ord}(G)$  este număr prim. Presupunem prin absurd că  $n = pq$ , unde  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p, q \geq 2$ . Atunci

$$e = x^{pq} = (x^p)^q,$$

deci  $\text{ord}(x^p) \leq q < n$ , deci notând  $m = \text{ord}(x^p)$ ,

$$H = \{e, x, x^{2p}, \dots, x^{p(m-1)}\}$$

este subgrup al lui  $G$  cu  $m < n$  elemente, deci nu poate fi izomorf cu  $G$ , contradicție.

**Cazul 2.**  $(G, \cdot)$  este grup infinit. Fie  $x \in G \setminus \{e\}$ . Dacă  $\text{ord}(x) = n$  este finit, atunci  $H = \{e, x, \dots, x^{n-1}\}$  este subgrup finit al grupului finit  $G$ , deci nu poate fi izomorf cu  $G$ . Prin urmare  $\text{ord}(x) = \infty$ ,  $\forall x \in G \setminus \{e\}$  și considerând  $H = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  avem că  $(H, \cdot)$  este subgrup al lui  $G$ ,  $H \neq \{e\}$ , deci  $(H, \cdot) \cong (G, \cdot)$ . Astfel am arătat că

$$G = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \forall x \in G \setminus \{e\}.$$

Astfel de grupuri verifică condiția din enunț. Este clar că  $(\mathbb{Z}, +) \cong (G, \cdot)$  și cum subgrupurile diferite de  $\{0\}$  ale lui  $\mathbb{Z}$  sunt cele de forma  $n\mathbb{Z}$ , cu  $n \in \mathbb{N}^*$ , subgrupurile lui  $G$  diferite de  $\{e\}$  vor fi de forma  $H_n = \{x^{nk} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ , care evident sunt izomorfe cu  $G$ , un izomorfism fiind

$$g : H_n \rightarrow G, f(x^{nk}) = x^k.$$

În concluzie  $G = \{e, x, \dots, x^{p-1}\}$  cu  $p \geq 2$  număr prim sau

$$G = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \forall x \in G \setminus \{e\}.$$

**2.** Fie  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$  inelul matricelor pătratiche de ordinul  $n$  cu elemente reale și  $C_n(\mathbb{R})$  mulțimea matricelor circulare de ordinul  $n$  cu elemente reale.

(O matrice este circulară dacă elementele liniilor 2, 3, ...,  $n$  se obțin prin permutarea circulară a elementelor primei linii).

a) Să se arate că dacă  $A, B \in C_n(\mathbb{R})$ , atunci  $AB \in C_n(\mathbb{R})$ .

b) Să se arate că  $(C_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$  este subinel al lui  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ .

c) Să se arate că grupurile  $(C_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$  și  $(\mathbb{R}_{n-1}[X], +, \cdot)$  sunt izomorfe, unde  $(\mathbb{R}_{n-1}[X], +, \cdot)$  este grupul aditiv al polinoamelor cu coeficienți reali de grad cel mult  $n - 1$ .

Dorin Andrica

măsura în radiani a unghiului  $\widehat{B}$ , respectiv  $\widehat{A}$ . Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile  $CAD$  și  $CDB$  rezultă

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin A} \quad \text{și} \quad \frac{BC}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{CD}{\sin B}.$$

Înmulțind aceste ultime două egalități obținem:

$$\frac{AC \cdot BC}{\sin^2 \alpha} = \frac{CD^2}{\sin A \cdot \sin B},$$

și atunci existența punctului  $D$  este echivalentă cu existența unei soluții a ecuației

$$\sin^2 \alpha = \sin A \cdot \sin B.$$

**3.** Dacă  $x$  și  $y$  sunt numere reale astfel încât  $xy \geq 0$ , atunci demonstrați că

$$|xy - 1| \leq \max\{|x^2 - 1|, |y^2 - 1|\}.$$

Octavian Agratini

**Soluție.** • Dacă  $x = 0$  sau  $y = 0$  sau  $x = y$ , relația este evidentă.

• Ipoteza  $xy \geq 0$  înseamnă

(i)  $x$  și  $y$  pozitive sau

(ii)  $x$  și  $y$  negative.

Dacă demonstrăm cazul (i), prin alegerea  $x = -x$ ,  $y = -y$  obținem faptul că (ii) se reduce la (i). Astfel vom demonstra inegalitatea considerând doar situația:

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x \neq y.$$

Pentru fixarea ideilor presupunem  $x < y$ . Vom folosi inegalitățile

$$a \leq \max\{a, b\}, \quad b \leq \max\{a, b\}. \quad (*)$$

**Cazul 1.**  $x$  și  $y$  supraunitare.

$$1 \leq x < y \underset{| \cdot y}{\Rightarrow} y \leq xy < y^2 \quad (1)$$

$$|xy - 1| = xy - 1 \underset{(1)}{<} y^2 - 1 = |y^2 - 1| \underset{(*)}{\leq} \max\{|x^2 - 1|, |y^2 - 1|\}.$$

**Cazul 2.**  $x$  și  $y$  subunitare.

$$0 < x < y \leq 1 \underset{| \cdot x}{\Rightarrow} 0 < x^2 < xy \leq x \quad (2)$$

$$|xy - 1| = 1 - xy < 1 - x^2 = |1 - x^2| \underset{(*)}{\leq} \max\{|x^2 - 1|, |y^2 - 1|\}.$$

**Cazul 3.**  $0 < x \leq 1 \leq y \xrightarrow{|x| \cdot |y|} |xy - 1| \leq \max\{|x^2 - 1|, |y^2 - 1|\}.$

**3.1.** Dacă  $xy \leq 1$  avem

$$\begin{cases} x^2 \leq xy & (3) \text{ și} \\ xy \leq y^2 & (4) \end{cases}$$

$$|xy - 1| = 1 - xy \underset{(3)}{\leq} 1 - x^2 = |1 - x^2| \underset{(*)}{\leq} \max\{|x^2 - 1|, |y^2 - 1|\}.$$

**3.2.** Dacă  $xy > 1$  avem

$$|xy - 1| = xy - 1 \underset{(4)}{\leq} y^2 - 1 = |y^2 - 1| \underset{(*)}{\leq} \max\{|x^2 - 1|, |y^2 - 1|\}.$$

**4.** Fie  $ABC$  un triunghi oarecare și fie punctele  $A' \in (BC)$ ,  $B' \in (CA)$  și  $C' \in (AB)$ . Fie  $A^*, B^*, C^*$  punctele de intersecție ale perechilor de drepte  $BB'$  și  $CC'$ ,  $CC'$  și  $AA'$ , respectiv  $AA'$  și  $BB'$ . Notăm cu  $R_{A_1}$ ,  $R_{B_1}$ ,  $R_{C_1}$  și cu  $R_{A_2}$ ,  $R_{B_2}$ ,  $R_{C_2}$  razele cercurilor circumscrise triunghiurilor  $AB^*C'$ ,  $BC^*A'$ ,  $CA^*B'$  respectiv  $AB'C^*$ ,  $BC'A^*$ ,  $CA'B^*$ . Să se demonstreze că

$$\frac{R_{A_1}}{R_{A_2}} \cdot \frac{R_{B_1}}{R_{B_2}} \cdot \frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = 1$$

dacă și numai dacă dreptele  $AA'$ ,  $BB'$  și  $CC'$  sunt concurente (altfel spus, punctele  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  coincid).

Daniel Văcărețu

**Soluție.** În triunghiul  $AB^*C'$  avem:

$$\frac{AB^*}{\sin[\pi - (A + \gamma_1)]} = 2R_{A_1} \Leftrightarrow R_{A_1} = \frac{AB^*}{2 \sin(A + \gamma_1)}.$$

În triunghiul  $AB^*C$  avem:

$$\frac{AB^*}{\sin \gamma_1} = \frac{b}{\sin[\pi - (\gamma_1 + \alpha_2)]} \Leftrightarrow AB^* = \frac{b \sin \gamma_1}{\sin(\gamma_1 + \alpha_2)}.$$

Rezultă

$$R_{A_1} = \frac{b \sin \gamma_1}{2 \sin(A + \gamma_1) \sin(\gamma_1 + \alpha_2)}. \quad (1)$$

În triunghiul  $AB'C^*$  avem:

$$\frac{AB'}{\sin(\alpha_1 + \beta_2)} = 2R_{A_2} \Leftrightarrow R_{A_2} = \frac{AB'}{2 \sin(\alpha_1 + \beta_2)}.$$

În triunghiul  $ABB'$  avem:

$$\frac{AB'}{\sin \beta_2} = \frac{c}{\sin(C + \beta_1)} \Leftrightarrow AB' = \frac{c \sin \beta_2}{\sin(C + \beta_1)}.$$

Rezultă

$$R_{A_2} = \frac{c \sin \beta_2}{2 \sin(C + \beta_1) \sin(\alpha_1 + \beta_2)}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{R_{A_1}}{R_{A_2}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin(C + \beta_1) \sin(\alpha_1 + \beta_2)}{\sin(A + \gamma_1) \sin(\gamma_1 + \alpha_2)}. \quad (3)$$

Analog

$$\frac{R_{B_1}}{R_{B_2}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin(A + \gamma_1) \sin(\beta_1 + \gamma_2)}{\sin(B + \alpha_1) \sin(\alpha_1 + \beta_2)} \quad (4)$$

$$\frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin(\beta + \alpha_1) \sin(\gamma_1 + \alpha_2)}{\sin(C + \beta_1) \sin(\beta_1 + \gamma_2)} \quad (5)$$

Înmulțind relațiile (3), (4) și (5) obținem:

$$\frac{R_{A_1}}{R_{A_2}} \cdot \frac{R_{B_1}}{R_{B_2}} \cdot \frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}.$$

Prin urmare

$$\frac{R_{A_1}}{R_{A_2}} \cdot \frac{R_{B_1}}{R_{B_2}} \cdot \frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$$

$$\Leftrightarrow AA', BB', CC' \text{ concurente.}$$

## Clasa a X-a

1. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația

$$\frac{(2^x + 3^x + 5^x)^{10}}{10^{2x+8}} = 3375^{x-1}.$$

**Soluție.** Avem

$$\begin{aligned} 2^x + 3^x + 5^x &= 2^{x-1} + 2^{x-1} + 3^{x-1} + 3^{x-1} + 3^{x-1} + 5 \cdot 5^{x-1} \\ &\geq 10 \cdot \sqrt[10]{2^{2x-2} \cdot 3^{3x-3} \cdot 5^{5x-5}} \\ &= 10 \cdot \sqrt[10]{337500^{x-1}} \end{aligned}$$

și atunci

$$\frac{(2^x + 3^x + 5^x)^{10}}{10^{2x+8}} \geq 3375^{x-1}$$

cu egalitate dacă și numai dacă  $2^{x-1} = 3^{x-1} = 5^{x-1}$ . Urmează că ecuația are o singură soluție reală  $x = 1$ .

**2.** Considerăm numerele  $a_k = 1 + q + \dots + q^{k-1}$ ,  $b_k = a_1 a_2 \dots a_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , unde  $q > 0$  este fixat. Pentru orice  $n$  natural fie

$$s_{n,k} = \frac{b_n}{b_k b_{n-k}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Determinați numerele  $x_k$  și  $y_k$  astfel încât să aibă loc următoarele relații

$$s_{n+1,k} = s_{n,k-1} + x_k s_{n,k}, \quad s_{n+1,k} = y_k q^{n+1} s_{n,k-1} + s_{n,k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Octavian Agratini

**Soluție.** Avem

$$\begin{aligned} \frac{s_{n+1,k} - s_{n,k-1}}{s_{n,k}} &= \frac{b_k \cdot b_{n-k}}{b_n} \left( \frac{b_{n+1}}{b_k \cdot b_{n+1-k}} - \frac{b_n}{b_{k-1} \cdot b_{n+1-k}} \right) \\ &= \frac{b_{n-k} b_{n+1}}{b_n b_{n+1-k}} - \frac{b_k b_{n-k}}{b_{k-1} b_{n+1-k}} \\ &= \frac{(a_1 \dots a_{n-k})(a_1 \dots a_{n+1})}{(a_1 \dots a_{k-1})(a_1 \dots a_{n+1-k})} - \frac{(a_1 \dots a_k)(a_1 \dots a_{n-k})}{(a_1 \dots a_{k-1})(a_1 \dots a_{n+1-k})} \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1-k}} - \frac{a_k}{a_{n+1-k}} = \frac{q^k + q^{k+1} + \dots + q^n}{1 + q + \dots + q^{n-k}} = q^k. \end{aligned}$$

Deci  $x_k = q^k$ . Analog, avem

$$\begin{aligned} \frac{s_{n+1,k} - s_{n,k}}{q^{n+1} s_{n,k-1}} &= \frac{b_{k-1} \cdot b_{n-k+1}}{q^{n+1} b_n} \left( \frac{b_{n+1}}{b_k \cdot b_{n+1-k}} - \frac{b_n}{b_k \cdot b_{n-k}} \right) \\ &= \frac{1}{q^{n+1}} \left( \frac{a_{n+1}}{a_k} - \frac{a_{n-k+1}}{a_k} \right) = \frac{1}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^{n-k+1} + \dots + q^n}{1 + q + \dots + q^{k-1}} = \frac{1}{q^k}. \end{aligned}$$

Deci  $y_k = 1/q^k$ .